أتحقق من فهمي صفحة 78:

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران مما يأتي :

1) f(x)=6x2-12x+12 **2) f(x)=23x3-3x2+4x+3**

الإجابة:

1) f'(x)=12x-12=0 → 12x=12 → x=1

x=1 عندما f اذن ، توجد نقطة حرجة للاقتران

أما النقطة الحرجة هي: (1,f(1))=(1,6)

2) f'(x)=2x2-6x+4=0

x2-3x+2=0(x-2)(x-1)=0x=2,x=1

x=1,x=2 عندما f اذن ، توجد نقطة حرجة للاقتران

أما النقطة الحرجة هي: (1,f(1))=(1,143)(2,f(2)=(2,133)

أتحقق من فهمي صفحة 81 :

أحدد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران في ما يأتي:

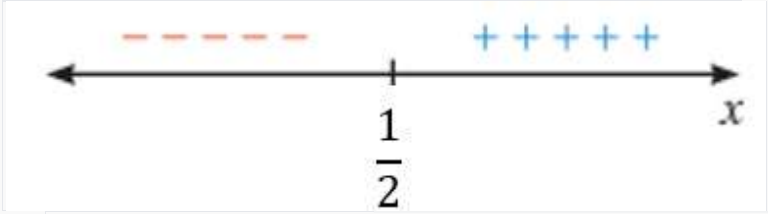
a) f(x)=6x2-6x+12

b) h(x)=x3-3x2+4x+3

الحل:

a)

f'(x)=12x-6=012x=6 → x=12



f(x) متزايد في الفترة (12,∞) ومتناقص في الفترة (-∞,12) .

b)

h'(x)=3x2-6x+4=0Δ: a=3 ,b=-6 ,c=4Δ:b2-4acΔ=36-48=-12<0

اذن: المميز أقل من صفر -
3x2-6x+4≠0
اذن h(x) متزايد على ( ) متزايد دائماً (-∞,∞)

أتحقق من فهمي صفحة 82

، فأستعمل المشتقة لأحل f(x)=x3-3x2-9x-1 إذا كان الاقتران
السؤالين الآتيين :

1) أجد النقاط الحرجة للاقتران f(x)

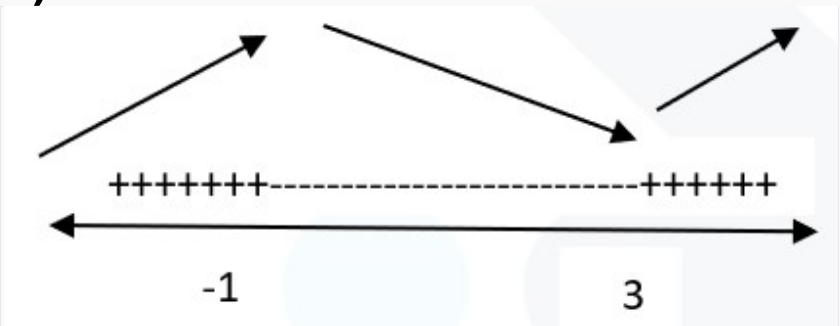
2) صنف النقاط الحرجة الى عظمى محلية أو صغرى محلية أو انعطاف أفقي .

الاجابة :

1) f'(x)=3x2-6x-9=0

3(x2-2x-3)=0(x+1)(x-3)=0x=-1,x=3
النقطة الحرجة: (-1,f(-1))=(-1,4)
النقطة الحرجة: (3,f(3))=(3,-28)

2)



وصغرى محلية (-1,4) يوجد قيمة عظمى محلية عند النقطة
عند (3,-28)

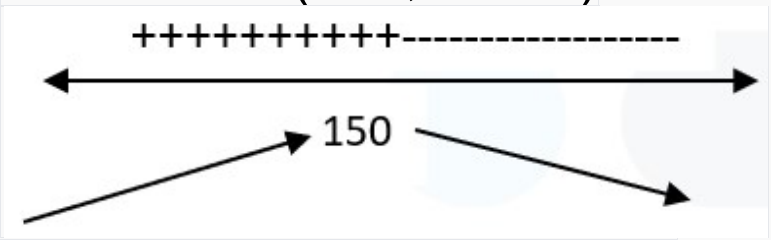
أتحقق من فهمي صفحة 84

لاحظ عالم حيوانات أن عدد الضفادع في بحيرة ما يمكن نمذجته بالاقتران: P(t)=120t-0.4t2+1000 ، حيث P عدد الضفادع ، t الزمن بالأشهر منذ بدء ملاحظة الضفادع . جد أكبر عدد يمكن أن تصل إليه الضفادع في البحيرة منذ بدء ملاحظتها.

الإجابة:

p'(t)=120-0.8t=0120=0.8tt=1200.8=150

النقطة الحرجة: (150,10000)



p(t)يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران

(عندما عدد الضفادع t=150 هو 10000)

أتدرب وأحل المسائل صفحة 84

أجد النقاط الحرجة لكل اقتران ممّا يأتي:

1) f(x)=x2-6x+10 **2) f(x)=1-12x+2x2**

3) f(x)=13x3-x **4) f(x)=13x3-x2**

الحل:

1) f'(x)=2x-6=0

2(x-3)=0 → x=3

اذن ، النقطة الحرجة هي: (3,f(3))=(3,1)

2) f'(x)=-12+4x=0

-4(3-x)=0 → x=3

اذن ، النقطة الحرجة هي: (3,f(3))=(3,-17))

3) f'(x)=x2-1=0

(x-1)(x+1)=0x=1,x=-1

اذن ، النقاط الحرجة للاقتران هي: (1,f(1))=(1,-23) و (-1,f(-1))=(-1,23)

4) f'(x)=x2-2x=0

x(x-2)=0x=0,x=2

اذن ، النقاط الحرجة للاقتران هي: (2,f(2))=(2,-43) و (0,f(0))=(0,0)

أُحدّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

5) f(x)=4x+3 **6) f(x)=7-5x**

7) f(x)=x2+7 **8) f(x)=x2-x**

9) f(x)=x2-5x+2 **10) f(x)=2x3-3x2**

11) f(x)=x3+3x2+3x-20

12) f(x)=3x2(12-5x) **13) f(x)=(x-2)2**

14) y=x4-8x2

الحل:

5) f'(x)=4

f'(x)>0

اذن f(x) متزايد دائماً.

---

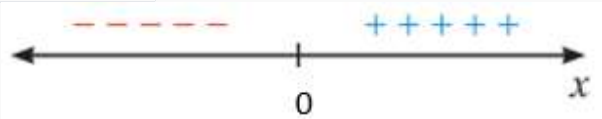
6) f'(x)=-5<0

اذن f(x) متناقص دائماً.

---

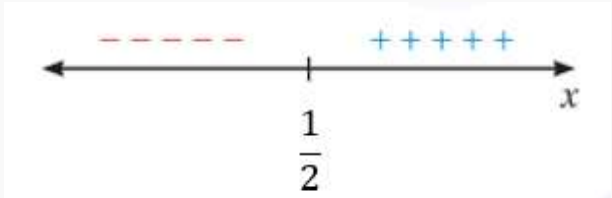
7) f'(x)=2x=0

x=0



متزايد في الفترة: (0,∞) ومتناقص في الفترة (-∞,0)

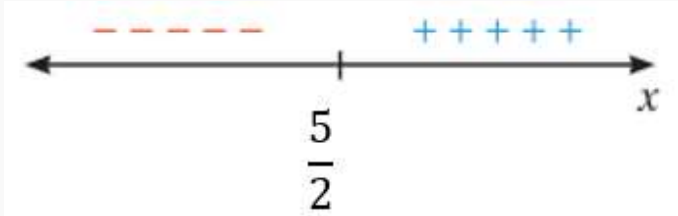
8) f'(x)=2x-1=0
2x=1 → x=12



متزايد في الفترة: (12,∞) ومتناقص في الفترة: (-∞,12)

---

9) f'(x)=2x-5=0
2x=5 → x=52



متزايد في الفترة: (52,∞) ومتناقص في الفترة: (-∞,52)

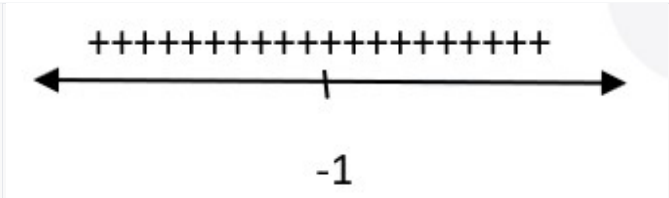
---

10) f'(x)=6x2-6x=0
6x(x-1)=0x=0,x=1

اذن، f(x) متزايد في الفترة (-∞,0) والفترة (1,∞) ومتناقص في الفترة (0,1)

---

11) f'(x)=3x2+6x+3
f'(x)=0→3(x2+2x+1)=0
x=-1

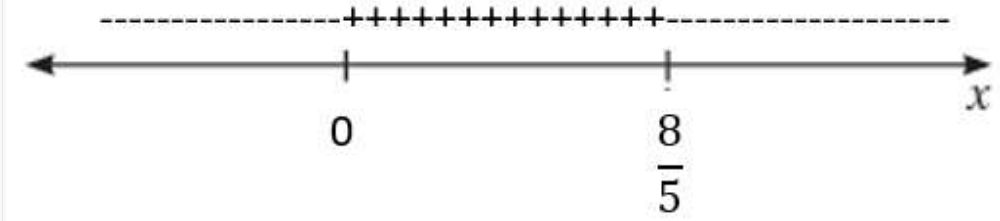


f(x) متزايد على الفترات: (-∞,-1)∪(-1,∞)

---

12) f(x)=36x2-15x3

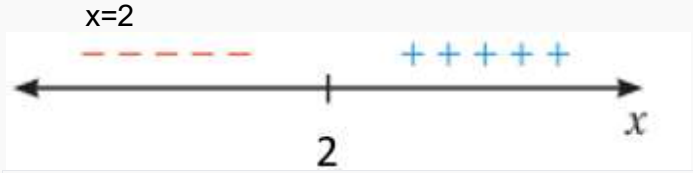
f'(x)=72x-45x2→9x(8-5x)=0x=0 , x=85



اذن، f(x) متناقص في الفترة (-∞,0) والفترة (85,∞) ، ومتزايد في الفترة: (0,85)

---

13) f'(x)=2(x-2)=0



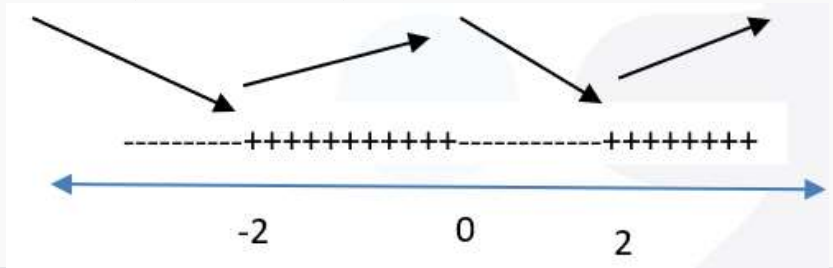
متزايد في الفترة: (2,∞) ومتناقص في الفترة: (-∞,2)

---

14) dydx=4x3-16x=0

4x(x2-4)=0

x=0 , x=2 , x=-2



- Y متزايد في الفترة: (2,∞)،(-2,0)
- Y متناقص في الفترة: (0,2)،(-∞,-2)

أجد النقاط الحرجة لكلّ اقتران ممّا يأتي، ثمّ أُحدّد نوعها باستعمال المشتقّة:

15) y=x3+6x2-15x-90

16) y=-(x-2)3+1

17) f(x)=x3-3x2-144x

18) f(x)=3x4+16x3+24x2+3

الحل:

15) dydx=3x2+12x-15

3(x2+4x-5)=0(x-1)(x+5)=0x=1 , x=-5

- النقاط الحرجة: (1,f(1))=(1,-98) ، (5,f(5))=(5,10)
- يوجد قيمة عظمى محلية عند (-5,10)
- يوجد قيمة صغرى محلية عند (1,-98)

---

16) dydx=-3(x-2)2=0

x=2

- النقطة الحرجة: (2,f(2))=(2,1)

- لم تتغير قبل وبعد النقطة الحرجة. اذاً dydx بما أن اشارة انعطاف أفقي (2,1) عند.

---

17) f'(x)=3x2-6x-144=0

3(x2-2x-48)=0

(x+6)(x-8)=0
x=-6,x=8
- (-6,f(-6)) , (8,f(8))
- النقاط الحرجة: **(-6,540) , (8,-832)**
- يوجد قيمة عظمى محلية عند (-6,540) ، وصغرى محلية عند: (8,-832)

---

18) f'(x)=12x3+48x2+48x
=12x(x2+4x+4)12x(x+2)2=0x=0 , x=-2
- النقاط الحرجة هي: (-2,19) , (0,3)
- يوجد قيمة صغرى محلية عند (0,3)
- يوجد نقطة انعطاف افقي عند (-2,19)

---

19) إذا كانت مشتقّة الاقتران f(x) تُعطى بالاقتران f '(x) = (x-1)2 (x-3) ؛ فأجد قِيَم x التي يكون عندها نقاط حرجة للاقتران f ، ثمّ أُحدّد نوعها.

الحل:

f'(x)=(x-1)2(x-3)f'(x)=0x=1 , x=3

نقطة انعطاف x=1 يوجد قيمة صغرى محلية وعند x=3 عندما افقي.

---

20) صناعة: تُنتِج إحدى الشركات صناديق لتخزين البضائع على شكل متوازي مستطيلات. إذا أمكن نمذجة حجم كلٍّ من هذه الصناديق بالاقتران: $V(x)=18x-2$، فأجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

الحل:

$V'(x)=18-2x2=02(9-x2)=0(3-x)(3+x)=0x=3,x=-3$

- النقاط الحرجة: $(3,f(3)=(3,36)$, $(-3,f(-3))=(-3,-36)$

- $(3,36)$ والنقطة $x=3$ يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما

مهارات التفكير العليا

تحدّ: إذا كان الاقتران $y=x3+ax2+b$ حيث a و b ثابتان؛ فأُجيب عمّا يأتي:

21) أُثبتُ أنّ لمنحنى الاقتران نقطة حرجة عند تقاطعه مع المحور y.

22) أُثبتُ أنّ للاقتران نقطة صغرى محلّية إذا كانت $a>0$.

الحل:

21) $y'=3x2+2ax=0$

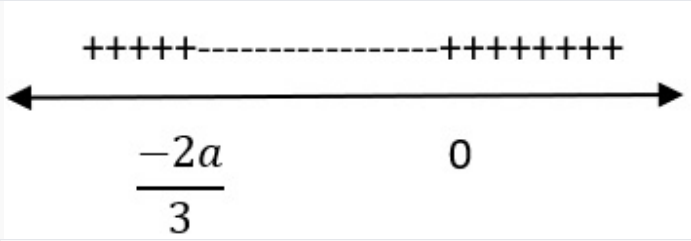
$x(3x+2a)=0x=0$, $x=-2a3$

يوجد نقطة حرجة عند $x=0$ هي: $(0,f(0))=(0,b)$ التقاطع مع محور y

22) $y'=3x2+2ax$

- إذا كانت: $a>0$

$-a<0$, $-2a3<0$



من اشارة فأن للاقتران قيمة عظمى محلية عندما: x=-2a3

---

23) تحدّ: إذا كان للاقتران: f(x)=ax2-4x+c حيث a و c ، عددان حقيقيان، نقطة حرجة هي (2 , -7) ، فما قيمة كلٍّ من a و c؟

الحل:

f(x)=ax2+4x+c , (2,-7)f'(x)=2ax+42ax+4=02a(2)+4=04a=-4 → a=-1f(x)=ax2+4x+cf(2)=-1(2)2+4(2)+c-7=-4+8+c-7+4-8=cc=-11

---

24) تحدّ: إذا كان الاقتران y=px3-4px2+5x-11 ، التي يكون عندها للاقتران p ؛ فأجد مجموعة قِيَم p > 0 حيث نقطتان حرجتان.

الحل:

y'=3px2-8px+5

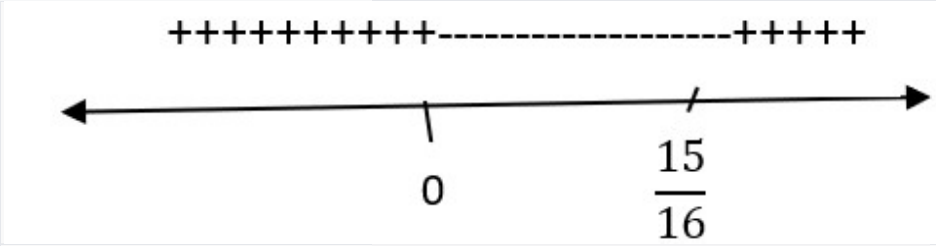
لها صفران حقيقيان y' حتى يكون للاقتران نقطتان حرجتان فأن Δ>0 مختلفان أي أن مميز العبارة التربيعية

a=3p ,b=-8p ,c=5

Δ=b2-4ac=(-8p)2-4(3p)(5)

64p2-60p>064p2-60p=04p(16p-15)=0p=0 , p=1516

- ندرس الإشارة:



التي تجعل b ، قيم b>1516 في الفترة Δ>0 يكون p>0 اذن b∈(1516,∞) نقطتان حرجتان y لـ