النهايات والاتصال

أتحقق من فهمي صفحة 54

أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\begin{cases} x & , x\le 0 \\ 1 & , x>0 \end{cases}$

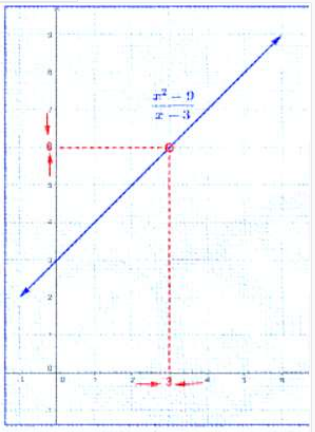
الحل:

a) عدديا

	اليسار ←			3	→ اليمين		
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1
	اليسار ←			6	→ اليمين		

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6$

بيانيا



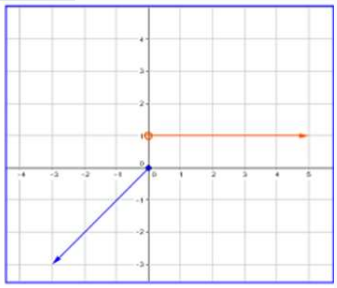
$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

b) عدديا

	اليسار ←			0	→ اليمين		
x	−0.1	−0.01	−0.001		0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001		1	1	1
	اليسار ←			0	1	→ اليمين	

$\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

بيانيا



$\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

أتحقق من فهمي صفحة 56

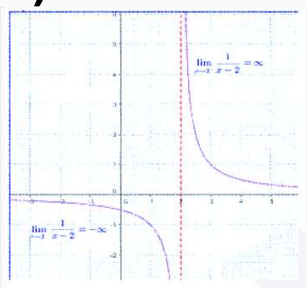
أجد كلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$

b) $\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^2}$

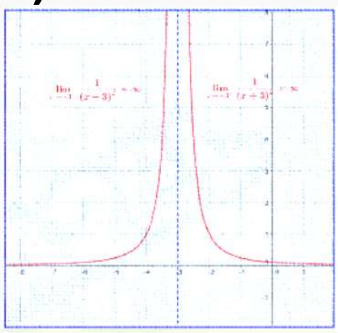
الحل:

a)



limx→2 1 x - 2 غير موجودة

b)



limx→-3 1 (x +3)2=∞

أتحقق من فهمي صفحة 58

أستعملُ خصائص النهايات لحساب كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) limx→1 (2x3 + 3x2 -4)

b) limx→4 1+3x23x-2

الحل:

a)

limx→1 (2x3 + 3x2 -4)=(limx→12x3+limx→1 3x2-limx→1 4)=2(1)3+3(1)2-4=1

b)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+3x^2}}{3x-2}=\frac{\lim_{x\to 4}\sqrt{1+3(x)^2}}{\lim_{x\to 4}3(x)-2}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to 4}1+3\left(\lim_{x\to 4}x\right)^2}}{3\lim_{x\to 4}x-\lim_{x\to 4}2}=\frac{\sqrt{1+3(4)^2}}{3(4)-2}$$

$$=\frac{\sqrt{49}}{10}=\frac{7}{10}$$

أتحقق من فهمي صفحة 59

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلّا فأذكرُ السبب:

a) limx→2 (3x2 - 5x +4)	b)limx→-1 1+4x2
c) limx→3 x3 - 5x - 6x2 - 2	d) limx→4 x2- 16x-4

الحل:

a) $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 4)$ $= 3(2)^2 - 5(2) + 4 = 6$	b) $\lim_{x\to -1}\sqrt{1-4x^2}$ العدد 1- لايقع ضمن مجال الاقتران فلذلك لايمكن ايجاد النهاية بالتعويض المباشر
c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x-6}{x^2-2} = \frac{3^3-5(3)-6}{3^2-2} = \frac{6}{7}$	d) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8$

أتحقق من فهمي صفحة 61

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

a) limx→0 7x - x2x	b) limx→0 2- x+4x	c) limx→5 |x-5|x-5

الحل:

a) limx→0 7x - x2x =limx→0 x(7 - x)x =7

b) limx→0 2-x+4x =limx→0 2-x+4x × 2+x+42+x+4 =limx→0 4 -(x+4)x(2+x+4)=limx→0 - xx(2+x+4)=-14

c) limx→5+ x -5x-5=1 limx→5- x-5x-5=-1⇒ limx→5 \|x-5\|x-5 غير موجودة

أتحقق من فهمي صفحة 64

أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة x المعطاة، وأبرّر إجابتي:

a) f(x) = x5 + 2x3 - x , x = 1	b) g(x) = x2 + 16x - 5 , x = 5
c) h(x) = x - 1 , x < 3 5 - x , x ≥ 3 , x = 3	d) p(x) = x2 - 25x - 5 , x ≠ 5 10 , x = 5 , x = 5

الحل:

a) الاقتران متصل عند $x=1$ لأن $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=6$.

b) الاقتران غير متصل عند $x=5$ لأن الاقتران غير معرف عند $x=5$

c)

$h(3)=5-3=2$

$\lim_{x\to 3^+} h(x)=\lim_{x\to 3^-} h(x)=2 \Rightarrow h(3)=\lim_{x\to 3} h(x)=2$

إذن الاقتران متصل عند $x=3$.

d)

$$p(5)=10$$

$$\lim_{x\to 5} p(x)=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}(x+5)=10$$

$$\Rightarrow p(5)=\lim_{x\to 5} p(x)=10$$

أتدرّب وأحلّ المسائل (صفحة 64)

أجد كلا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

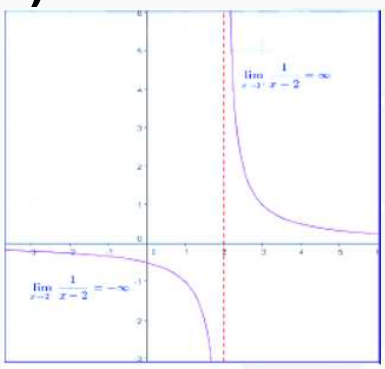
1) $\lim_{x\to 2}$ 1x-2	2) $\lim_{x\to 3}$ (x+7)	3) $\lim_{x\to 0}\|x\|$
4) $\lim_{x\to -1}$(x2-5)	5) $\lim_{x\to 2}$ x2-1x2-2x+1	6) $\lim_{x\to 3}$ 1(x 3)2

7)limx→3 f(x) , f(x)={-1 , x≠31 , x=3

8)limx→-2 p(x) , p(x)={x+6 , x<-2-12x+1 , x>-2

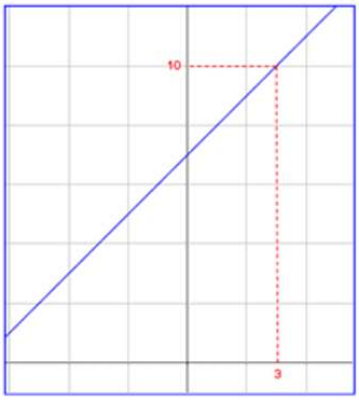
الحل:

1)



limx→2 1x-2 غير موجودة

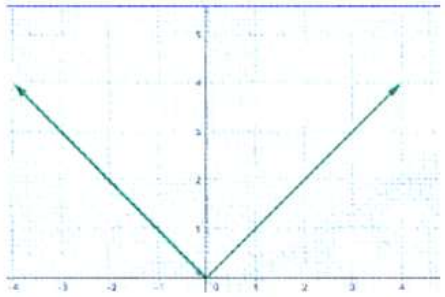
2)



	اليسار		3	اليمين		
x	2.9	2.99	2.99		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	9.7	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1
	اليسار		10	اليمين		

limx→3 (x+7)=10

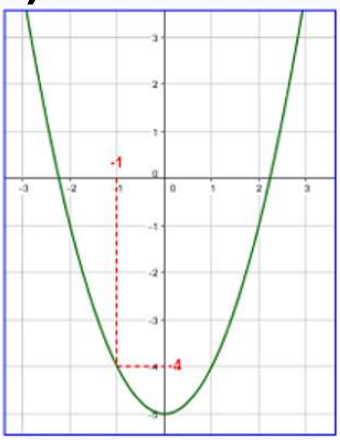
3)



	اليسار		0	اليمين		
x	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
	اليسار		0	اليمين		

limx→0|x|=0

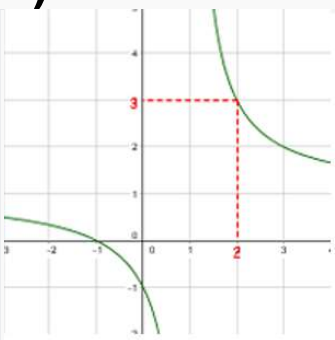
4)



	اليسار		-1	اليمين		
x	-1.1	-1.01	-1.001		0.999-	-0.99	-0.9
$f(x)$	-3.79	-3.97	-3.99		-4.002	-4.02	-4.2
	اليسار		-4	اليمين		

$\lim_{x \to -1}(x^2-5)=-4$

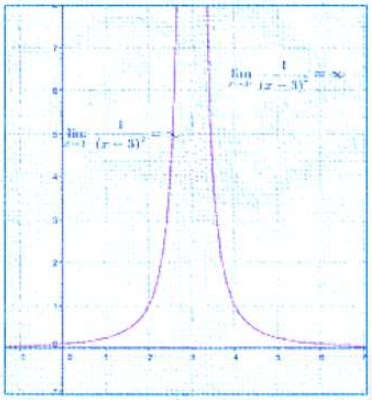
5)



	← اليسار		2	اليمين →			
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.22	3.02	3.002		2.99	2.98	2.81
	← اليسار		3	اليمين →			

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=3$

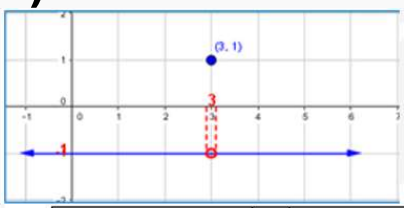
6)



	← اليسار		3	اليمين →			
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100
	← اليسار		∞	اليمين →			

$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2}=\infty$

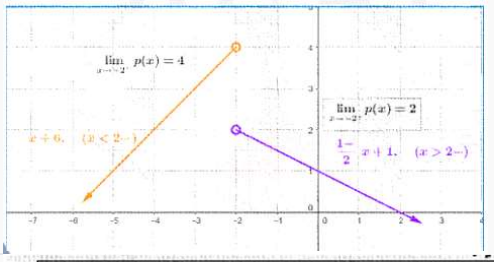
7)



	← اليسار		3	اليمين →			
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−1	−1	−1		−1	−1	−1
	← اليسار		-1	اليمين →			

$\lim_{x \to 3} f(x) = -1$

8)



	← اليسار		−2	اليمين →			
x	−2.1	−2.01	−2.001		−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		1.999	1.995	1.95
	← اليسار		4	اليمين →			

$\lim_{x \to -2} p(x)$ غير موجودة

أجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

9)$\lim_{x \to 3}$ (x2-

10)$\lim_{x \to 3}$

11)$\lim_{x \to 9}$(x+

4x+7)	x2-16x-4	1x)2
12)limx→2π(x3+πx-5π3)	13)limx→-3x-32x+4	14)limx→4 x2+113
15)limx→3x3-27x-3	16)limx→-12x2+5x+3x+1	17)limx→2x2-x-2|x-2|
18)limx→3f(x) , f(x)={x - 1 , x < 33x - 7 , x > 3	19) limt→4 1t-12t-4	20) limx→3 x+1-2x-3

الحل:

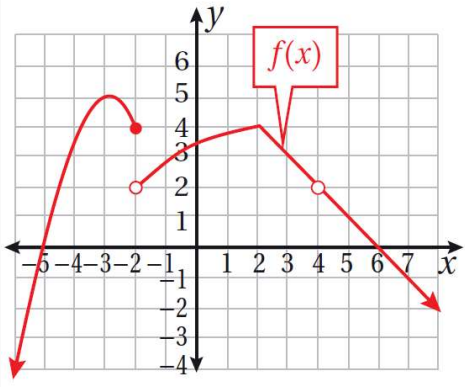
9)limx→3 (x2-4x+7)=9-12+7=4	10)limx→3 x2-16x-4=9-163-4=7
11)limx→9(x+1x)2 =(3+13)2=1009	12)limx→2π(x3+πx-5π3)=3π3+2π2
13)limx→-3x-32x+4=3	14)limx→4 x2+113
15)limx→3x3-27x-3=limx→3(x-3)(x2+3x+9)x-3=27	16)limx→-12x2+5x+3x+1=limx→-1(2x+3)(x+1)x+1=1
17)limx→2+(x-2)(x+1)x-2≠limx→2-(x-2)(x+1)x-23≠-3 limx→2x2-x-2|x-2| غير موجودة	18)limx→3+f(x)=limx→3+(3x-7) =2limx→3-f(x)=limx→3-(x-

1) =2limx→3f(x)=2

19)limt→41t-12t-4×1t+121t+12=limt→41t-14(t-4)(1t+12)=limt→44-t4t×1(t-4)(1t+12)=limt→4-14t (1t+12)=-116

20) limx→3 x+1-2x-3×x+1+2x+1+2 limx→3 x+1-4(x-3)(x+1+2)=14

أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:



21) limx→2 f(x)

22) limx→-2 f(x)

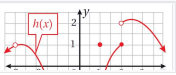
الحل:

21) 4

22) غير موجودة

أستعملُ التمثيل البياني؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

23) limx→1 h(x)



24) $\lim_{x\to 2} h(x)$

25) $\lim_{x\to 3} h(x)$

الحل:

23) $\lim_{x\to 1} h(x)=-1$

24) غير موجودة

25) $\lim_{x\to 3} h(x)=2$

---

26) إذا كان $f(x) = ax2 + bx + c$ ، حيثُ $a\neq 0$ ، وكان $f(0)=0$ ، $\lim_{x\to 1} f(x)=5$ ، $\lim_{x\to -2} f(x)=8$ ؛ فأجد قيم الثوابت a و b و c.

الحل:

$f(0)=0\rightarrow c=0$

بما أن الاقتران كثير حدود فإنّ:

$\lim_{x\to 1} f(x)=5=f(1)\rightarrow a(1)2+b(1)+0=5a+b=5$

$\lim_{x\to 1} f(x)=8=f(-2)\rightarrow a(-2)2+b(-2)+0=84a-2b=8$

بح حل نظام المعادلات الخطية الناتج بالحذف او التعويض نجد أنّ: **a_3 ، b_2**

أستعملُ التمثيلين البيانيين المجاورين؛ لأجد كلّ نهاية ممّا يأتي:

الحل: 29) $\lim_{x\to 0} (f(x) \times g(x))$ 28) $\lim_{x\to 1} 3+f(x)$ 27) $\lim_{x\to 2} (f(x) + g(x))$

الحل:

27) limx→2 (f(x) + g(x))=2+0=2

28) limx→1 3+f(x)=3+1=2

29) limx→0 (f(x) × g(x))=0×limx→0 g(x)=0

المعطاة، وأبرّر إجابتي x أُحدّد إذا كان كلّ اقتران ممّا يأتي متّصلًا عند قيمة:

30) f(x) = πx2+ 4.2x +7 , x=-5

31) g(x)=16 x2+25, x=-5

32) h(x)=x2 , x < 03 , x ≥ 0 , x = 0

الحل:

30) متصل لأنه كثير حدود

31) متصل لأن الاقتران نسبي معرف عند x=-5

32) h(0)=3

limx→0+ h(x)=3 , limx→0- h(x)=0

limx→0 h(x) غير موجودة

إذن الاقتران غير متصل عند x=0

---

33) إذا

كان f(x)=x + 3 , x ≠ 32 + k , x = 3 متّصلًا عند

x = 3 ؛ فأجد قيمة الثابت

الحل:

الاقتران متصل عند x=3 ،

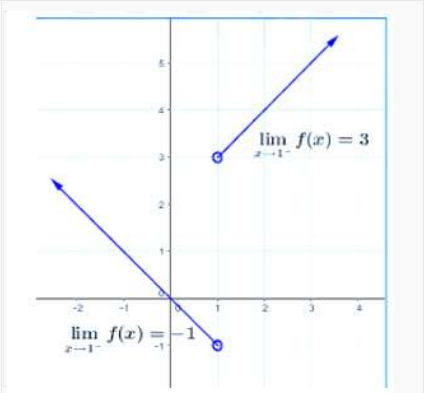
إذن: limx→3 f(x)=f(3)3+3=2+k → k =4 → k =16

مهارات التفكير العليا

34) تحدّ: أجد limx→1 x2+|x-1|-1|x-1| بيانيًّا وجبريًّا.

الحل:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-1-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}(x+2)=3$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x+1-1}{1-x}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)}{1-x}=-1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}\neq\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$$
$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$ غير موجودة



---

35) تبرير: أجد قيمتَي الثابتين m و b اللتين تجعلان limx→0 mx+b-3x=1 ، وأبرّر إجابتي.

الحل:

بما أن المقام صفر والنهاية موجودة اذن البسط صفر

m(0)+b-3=0 → b=3 → b=9

limx→0 mx+b-3x×mx+b+3mx+b+3=limx→0 mx+b-9x(mx+b+3)limx→0 mx+9-9x(mx+9+3)=limx→0 m(mx+9+3)=m3+3=1 → m=6

---

36) تبرير: أجد قيمة الثابت a التي تجعل limx→1 (1x-1-ax2-1) موجودة، وأبرّر إجابتي.

الحل:

limx→1 (1x-1-ax2-1)=limx→1 x2-1-a(x-1)(x-1)(x2-1)=limx→1 x2-1-ax+1(x-1)(x2-1)

بتحليل البسط :

limx→1 (x-1)(x-a+1)(x-1)(x2-1)=limx→1 (x-a+1)(x2-1)

بما أن المقام عند x=1 صفر والنهاية موجودة اذن البسط عند x=1 يجب أن يكون صفر

1-a+1=0 → a=2